NOM: HOURS Prénom: Florent

Rouge — Entourer l'épreuve — Bleu Entourer le jury — A B C D E F

Sujet choisi: 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples & appl.

Autre sujet: 116 - Polynômes irreductibles à une indeterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

G désignera toujours un groupe

I. PRÉLIMINAIRES

1) Définitions

Déf 1: une action de G sur un ensemble X est une application ϕ:

$\psi : G \times X \longrightarrow X$ tq
$(g, x) \longmapsto g.x$

- $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, \; g'.(g.x) = (g'g).x$
- $\forall x \in X, \; e.x = x$.

On note $G \curvearrowright X$.

Déf 2: si $x \in X$, son orbite est l'ensemble $O_x = \{g.x, g \in G\}$. Son stabilisateur est $Stab_x = \{g \in G, g.x = x\}$

Prop 3: une action $G \curvearrowright X$ induit un morphisme $\phi : G \longrightarrow Bij(X)$. L'action est dite fidèle si $Ker \phi = \{e\}$.

Déf 4: une action est dite transitive s'il n'y a qu'une seule orbite.

Prop 5: $x \in X$. Alors $O_x \underset{bij}{\simeq} G/_{Stab_x}$

2) Equation aux classes, formule de Burnside

Prop 6 (équation aux classes) si X est fini, $|X| = \sum_{x \in \Omega} |O_x|$, où Ω est un système de représentants des orbites.

Appl 7: (Wedderburn) Tout corps fini est commutatif

Appl 8: théorèmes de Sylow.

Prop 9: (formule de Burnside) $G \curvearrowright X$, G et X fini. k le nombre d'orbites. Alors $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X, g.x = x\}|$

Appl 10: une roue de loterie est partagée en n secteurs qu'on colorie de p couleurs différentes. Combien y a-t-il de roues différentes?

Réponse: $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) p^d$

II. ACTIONS ET GROUPES FINIS

1) Action par translation (G fini)

Action: $G \curvearrowright G$ $\; g \cdot h = gh$.

Prop 11: l'action est fidèle

Csq 12: $G \hookrightarrow S_{|G|}$ (th de Cayley).

2) Action par translation des classes.

Action: $H \leqslant G$, $[G:H] = k$.

$G \curvearrowright G/H \quad g \cdot g'H = gg'H$.

Prop 13: G fini, et p le plus petit facteur premier de $|G|$. Un sg d'indice p de G est forcément distingué.

Prop 14: un sg d'indice n de S_n est isomorphe à S_{n-1}.

3) Action par conjugaison (G fini)

Action: $G \curvearrowright G$. $\; g \cdot h = ghg^{-1}$.

NOM: HOURS Prénom: Florent

Rouge — Entourer l'épreuve — Bleu Entourer le Jury — A B C D E F

Sujet choisi: 101

Autre sujet: 116

Th 15 (Sylow) $|G| = p^\alpha m$, $p \nmid m$, $\alpha \geq 1$.
- G contient un p-Sylow.
- Les p-Sylow sont conjugués
- Si on note n_p le nombre de p-Sylow alors $n_p \equiv 1 [p]$, $n_p | m$

Appl 16 un groupe d'ordre pq (p, q premiers) n'est pas simple.

Appl 17. H un sg distingué de A_5. Si H contient un 5-cycle, il les contient tous.

III - ACTIONS DE GROUPES DANS DIVERS DOMAINES

1) En géométrie

- Soit P un polyèdre régulier, S l'ensemble de ses sommets. On note $Iso(P) = \{g \in SO_3(\mathbb{R}),\ g(S) = S\}$.

Alors $Iso(P) \curvearrowright S$.

Csq 18.
- $Iso^+(T) \simeq A_4$
  $Iso(T) \simeq S_4$
- $Iso^+(C) \simeq Iso^+(O) \simeq S_4$
  $Iso(C) \simeq Iso(O) \simeq \mathbb{Z}_2 \times S_4$
- $Iso^+(D) \simeq Iso^+(I) \simeq A_5$.

- Soit G un sous groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$, P l'ensemble des pôles de $G \setminus \{Id\}$. Alors $G \curvearrowright P$.

Csq 19 Les sous groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les D_n, A_4, A_5 et S_4.

2) Algèbre linéaire. ($\mathbb{K}$ corps)

- Action par équivalence

$GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K}) \curvearrowright M_{n,m}(\mathbb{K})$.
$(P,Q).M = PMQ^{-1}$.

Th 20: $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.
$O_A = O_B$ ssi $rg A = rg B$.

Appl 21 $rg(A) = rg({}^tA)$

Appl 22: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Th 23: on note $O_r = \{A \in M_{n,m}(\mathbb{K}), rg A = r\}$
Alors $\overline{O_r} = \coprod_{k \leq r} O_k$.

- Action par conjugaison:

$GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright M_n(\mathbb{K})$.
$P.M = PMP^{-1}$.

Déf 24: deux matrices A, B dans la même orbite sont dites semblables, et on note $A \simeq B$

Prop 25. $A \simeq B \Longrightarrow \chi_A = \chi_B$.

Th 26 $A \simeq B \iff$
- $\chi_A = \chi_B$
- $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\dim(Ker(A - \lambda I_n)^k) = \dim(Ker(B - \lambda I_n)^k)$

3) Algèbre bilinéaire ($\mathbb{K}$ corps, $carac(\mathbb{K}) \neq 2$)

$GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright M_n(\mathbb{K})$.
$P.M = PM{}^tP$. Si $O_A = O_B$, on dit que A et B sont congrues et on note $A \equiv B$.

NOM: HOURS   Prénom: Florent

Rouge — Entourer l'épreuve — Bleu   Entourer le jury — A B C D E F

Sujet choisi: 101

Autre sujet: 116.

Rq 27 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Th 28: $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A \equiv B$ ssi $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A \equiv B$ ssi $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$ et $p(A) = p(B)$

où $p(A) = \max\{\dim F,\ F \text{ sev tq } q_{A|F} \geq 0\}$

- si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ soient A, B tq $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B = n$.

$A \equiv B$ ssi $\delta(A) = \delta(B)$,

où $\delta(A) = \det A \pmod{\mathbb{F}_q^{*2}}$

Csq 29 sur $\mathbb{R}$, il y a $n+1$ classes d'équivalence pour les formes quadratiques non dégénerées, et deux sur $\mathbb{F}_q$

4) Corps finis

Prop 30 $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

$|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)\cdots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}$

$|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| = 1+q$.

Th 31: $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$

$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$; $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.

$PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$

$PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$; $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$

Csq 32 $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ et $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ ne sont pas simples.

Th 33: p, q deux nombres premiers impairs. On note $\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ est un carré modulo } q \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

IV) ACTION D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

1) Théorème d'homéomorphisme.

Th 34. $G \curvearrowright X$. Si G est compact, X séparé, ϕ continue, alors $\forall x \in X$, $O_x \underset{\text{homéo}}{\simeq} G/\mathrm{Stab}_x$

Appl 35 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe

2) Transport de structure.

Déf 35: $Gr_{m,n}(\mathbb{R}) = \{F \text{ sev de dim } m \text{ d'un ev } E \text{ de dim } n\}$.

Action: $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright Gr_{m,n}(\mathbb{R})$.

Action: $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright Gr_{m,n}(\mathbb{R})$.

Prop 36: l'action $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright Gr_{m,n}(\mathbb{R})$ est transitive.

Csq 37 $Gr_{m,n}(\mathbb{R}) \underset{\text{bij}}{\simeq} O_n(\mathbb{R})/\mathrm{Stab}_{F_0}$

$(F_0 \in Gr_{m,n}(\mathbb{R}))$.

Ainsi, on peut munir $Gr_{m,n}(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace topologique compact

DÉVELOPPEMENTS:

1. Loi de réciprocité quadratique (Th 33)
2. Isomorphismes exceptionnels (Prop 30 + th 31 + prop 14)
3. Groupes d'isométrie du tétraèdre et du cube (partie de Csq 18)